FOURIEROVI REDOVI I INTEGRALI

Pri rješavanju različitih inžinjerskih problema koriste se periodičke funkcije. Pojavljuju se pod terminom periodičke funkcije, a u ovu skupinu spadaju trigonometrijske funkcije, sinus i kosinus, koje imaju važnost u praktičnoj primjeni, a vode nas do Fourierovih redova.

Ime su dobili po francuskom fizičaru Josephu FOURIERU (1768-1830), a važne su pri rješavanju problema vezanih uz obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Razmotrit ćemo osnovne pojmove i činjenice vezane uz Fourierove redove, kao i primjenu nizova na neke tehničke probleme u inženjerskoj praksi.

8.1 Periodičke funkcije. Trigonometrijski nizovi

Za funkciju $f(x)$ kažemo da je periodička funkcija ako je definirana za svaki x koji je element

skupa R realnih brojeva i ako postoji takav pozitivan broj da vrjedi:

(1) $f(x+T)=f(x)$

Broj T se tada zove period funkcije $f(x)$.

1\.

Najmanji pozitivan period T funkcije $f(x)$, koja nije konstanta, češće se naziva primitivni period od $f(x)$. Npr. primitivni periodi funkcije sinx i funkcije sin $2x$ su 2π odnosno π.

Grafovi takve funkcije dobijaju se periodičkim ponavljanjem grafa unutar bilo kojeg intervala duljine perioda T. Iz toga proizlazi da za bilo koji cijeli broj n:

$f(x+nT)=f(x)$

dakle svaki višekratnik $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \ldots$ nT ($n \neq 0$) od T također je period te funkcije. Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju period tada će i funkcija

$h(x) = af(x) + \mathrm{bg}(x)$ (a, b konstante)

imati period T.

Standardni primjeri periodičnih funkcija su sinusne i kosinusne funkcije i napominjemo da su funkcije $f = c$ = const također periodičke funkcije u smislu definicije, jer zadovoljavaju uvjet (1) za svaki pozitivan period T. Naš problem bit će prikaz različitih funkcija s periodom 2π kao što su:

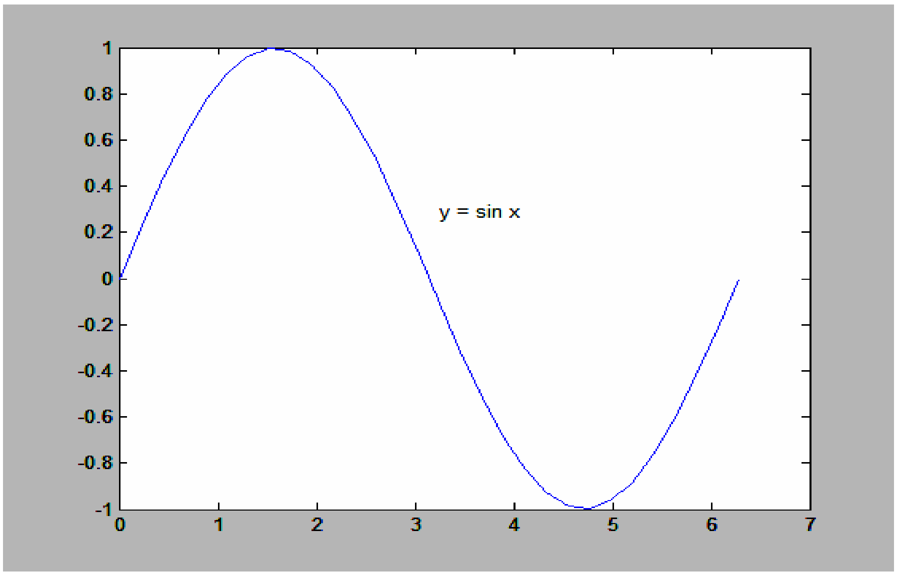
1. cos x, sin x, cos $2x$, sin $2x$,...., cos nx, six nx,....

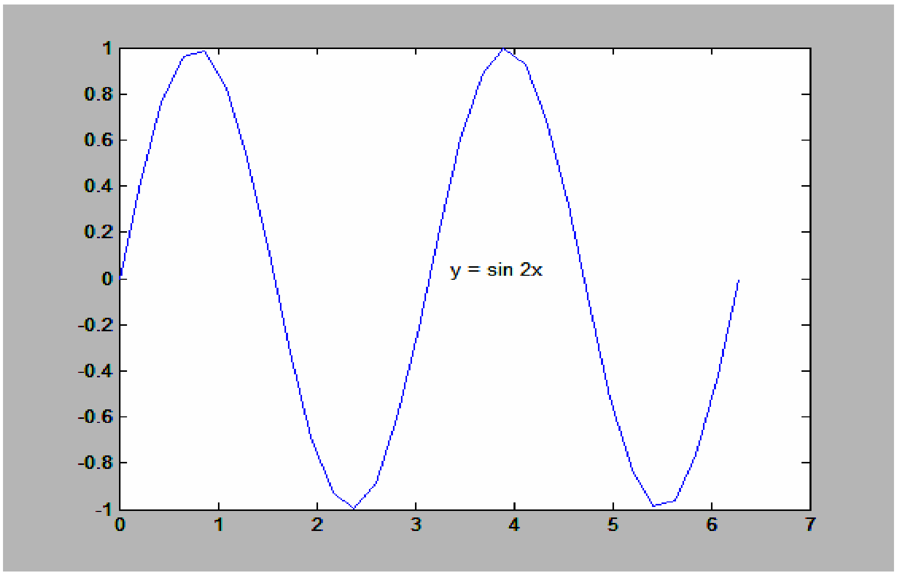
Redovi koji se pojavljuju unutar ovog poglavlja mogu se zapisati u obliku trigonometrijeskog $0 \le t \le T$ izraza:

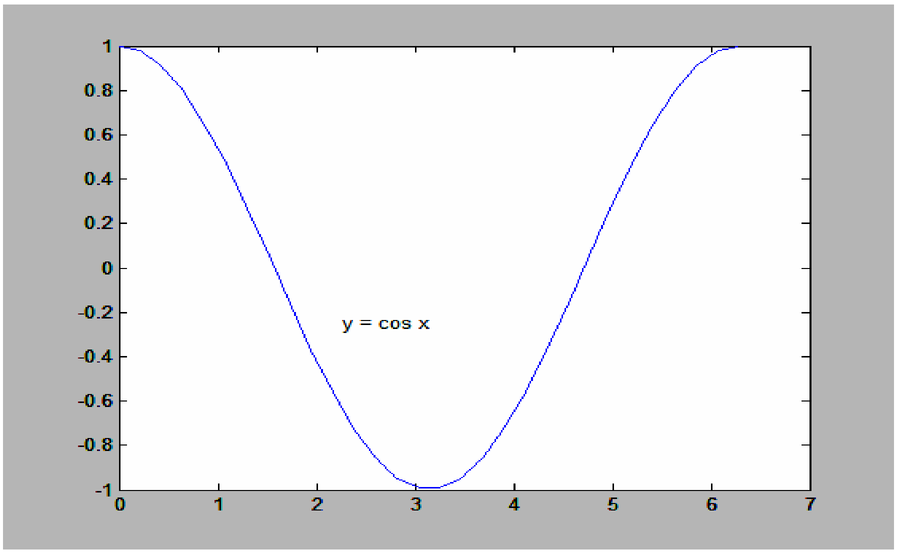
(2) $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ...$

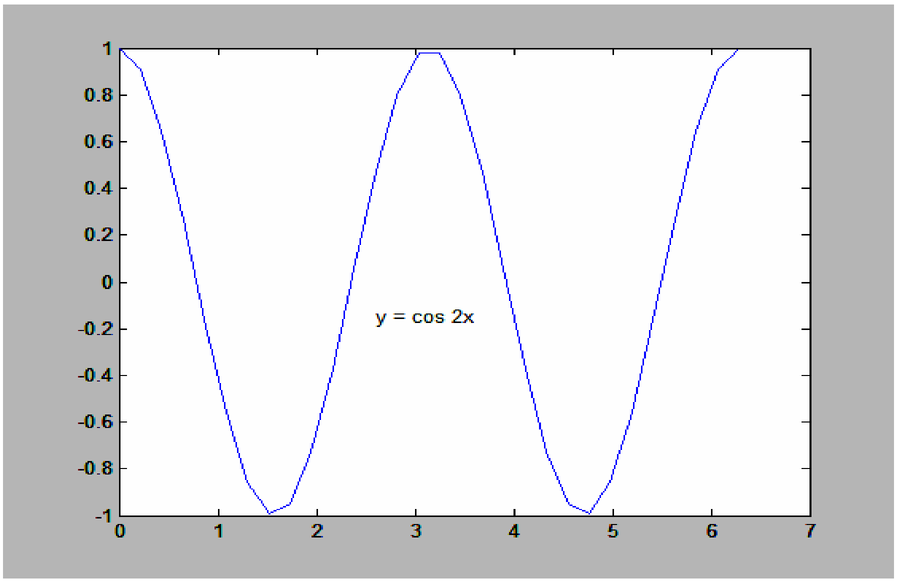
gdje su $a_0, a_1, a_2, ...a_n, b_1, b_2, ...b_n$ ... realne konstante.

Ovakvi redovi se nazivaju trigonometrijski redovi, a članovi a_n i b_n se nazivaju koeficijenti trigonometrijskog reda. Vidljivo je da svaki član ovog reda ima period 2π. Ako trigonometrijski red konvergira, suma će biti funkcija s periodom 2π.




y = sin 2x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7


y = cos x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7



Slika2. Sinusna i kosinusna funkcija ima period 2π

Periodičke funkcije koje se pojavljuju u inženjerskim problemima su često komplicirane i poželjno je predočiti takve funkcije kao jednostavne periodičke funkcije. Vidljivo je da se bilo koja periodička funkcija *f(x)* s periodim 2π može aproksimirati trigonometrijskim redom, koeficijenti u (2) mogu se izvesti u terminima funkcije *f(x)*. (Primjeri vezani uz vibracije i oscilacije).

8.2 Fourierovi redovi. Eulerove formule

Pretpostavimo da je *f(x)* periodička funkcija s periodom 2π, koju možemo prikazati trigonometrijskim redom.

(1) $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + \sin nx)$$

Želimo odrediti koeficijente a_n i b_n u odgovarajućem redu (1).

Prvo izračunavamo koeficijent a_0 inegrirajući izraz (1) s obje strane od $-\pi$ do π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx$$

Parcijalna integracija daje nam sljedeću jednakost:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx)$$

Prvi dio izraza na desnoj strani jednak je $2\pi a_0$ dok su ostali integralni izrazi jednaki nuli, te provedbom integracije dobivamo:

(2) $$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Područje ispod krivulje funkcije *f(x)* od $-\pi$ do π podijeljena s 2π.

Sada ćemo redom izračunati koeficijente $a_{1,} a_2,...$ po sličnom postupku . Množit ćemo s cos *mx*, gdje je m bilo koji fiksni pozitivan broj. Slijedi:

(3) $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx \right] \cos mx dx$$

Integrirajući član po član metodom parcijalne inegracije proizlazi da je desna strana jednaka:

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right]$$

Prvi integral i zadnji integral jednaki su nuli zato jer je podintegralni izraz neparna funkcija.

Primjenjujući svojstva parnosti i neparnosti funkcije na drugi integral dobivamo izraz:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m) dx$$

U ovoj formuli prvi integral s desne strane jednak je nuli za svaki m i n koji se uzimaju u obzir i posljednji integral također je jednak nuli kada je $n \neq m$ ili iznosi π za svaki $n = m$. Proizlazi da je desna strana (3) jednaka:

(4) $$a_m = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$$

Konačno možemo izračunati koeficijente b_1, b_2,... u (1) pri čemu množimo sa sin *mx*, gdje je *m* bilo koji fiksni pozitivan broj.

Integracijom dobivenog izraza od $-\pi$ do π dobivamo:

(5) $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx \right] \sin mx dx$$

Integrirajući član po član metodom parcijalne integracije, vidimo da je desna strana izraza jednaka:

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mxdx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mxdx \right]$$

Prvi inegral jednak je nuli. Sljedeći integral je poput oni koji su razmatrani ranije i također je jednak nuli za svaki n = 1, 2,... Posljednji integral može se transformirati u izraz (1) i dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)xdx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)xdx$$

Posljednji član ovog izraza jednak je nuli. Prvi član s desne strane jednak je nuli za svaki $n \neq m$ ili iznosi π za svaki $n = m$. Kao i u izrazu (5) i ovaj je član pomnožen faktorom b_m. Desna strana izraza (5) postaje $b_m\pi$, dakle:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mxdx$$

Upisujući *n* umjesti m u ovu formulu i u (4), zajedno ćemo dobiti Euerove formule:

(a) $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

(6) (b) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

(c) $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

Dana periodička funkcije *f(x)* s periodom 2π dat će nam koeficijente a_0, a_n i b_n, prema (6) i mogućnost oblika trigonometrijskog niza:

(7) $$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + ...$$

Ovaj red se naziva Fourierov red i odgovara *f(x)* i njene koeficijente nazivamo Fourierovi koeficijenti funkcije *f(x)*.

Zbog periodičnosti podintegralnih funkcija, integral integracije u (6) može se zamjeniti s bilo kojim intervalom duljine 2π, npr. interval $0 \le x \le 2\pi$.
Iz definicije određenog integrala slijedi činjenica da ako je funkcije *f(x)* neprekinuta ili samo po dijelovima neprekinuta integral te funkcije u (6) postoji i možemo izračunati Fourierove koeficijente za danu funkciju prema (6).

TEOREM 1: Ako imamo periodičku funkciju *f(x)* sa periodom 2π koja je djelomično neprekidna unutar intervala $-\pi \le x \le \pi$ ¨i ukoliko postoji njena derivacija i s lijeve i sa desne s trane u svakoj točki unutar intervala integracije tada za odgovarajuci Fourierov red kažemo da je konvergentan.

PRIMJEDBA: Ukoliko Fourierov red odgovarajuće funkcije *f(x)* konvergira, kao što je objašnjeno u teoremu 1, red se naziva Fourierovim redom funkcije *f(x)* pa možemo pisati:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + ...$$

i kažemo da *f(x)* predstavlja Fourierov red dotične funkcije. Kako je ovaj niz konvergentan i novodobiveni red imat će sumu jednaku sumi originalnog reda pa možemo pisati:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

8.3 Parne i neparne funkcije

Funkcija *g = g(x)* je parna ako vrijedi da je *g(x) = g(-x).* Tipični primjeri parne i neparne funkcije dani su na sljedećim grafovima:

Graf ovakvih funkcija simetričan je s obzirom na ordinatu . Za funkciju *h(x)* kažemo da je neparna ako vrijedi *h(-x) = -h(x).*
Funkcija cos *nx* je parna funkcija dok je sin *nx* neparna funkcija. Ako je funkcija *g(x)* parna funkcija tada vrijedi:

(1) $$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} g(x)dx$$

Ako je funkcija h(x) neparna tada vrijedi :

(2) $$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = 0$$

Formule (1) i (2) proizlaze iz grafova tih funkcija što se vidi s grafova funkcija g i h. Produkt funkcija $q = gh$, pri čemu je g parna funkcija, a h neparna funkcija je neparna funkcija jer:

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)\left[-h(x)\right] = -q(x)$$

Stoga ako je funkcija *f(x)* parna tada $f \sin nx$ u (6c) posljednjeg poglavlja neparna i Fourierov koeficijent $b_n = 0$. Slično ako je funkcija *f(x)* neparna tada je i funkcija $f \cos nx \ (m \neq n)$ u (6b) također neparna,a koeficijent $a_n = 0$. Iz ovog i relacije (1) proizlazi

TEOREM 1. Fourierov red bilo koje parne periodičke funkcije s periodom 2π je kosinusni Fourierov red koji zapisujemo:

(3) $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n}(a_n \cos nx)$$

s koeficijentima....

(4) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

Fourijerov red bilo koje neparne periodičke funkcije perioda 2π je tzv. sinusni Fourierov red koji zapisujemo:

(5) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

s koeficijentima

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

npr. Funkcija *f(x)* u primjeru 1 poglavlja 8 je naparna funkcija i stoga je prikazana sinusnim Fourierovim nizom. Daljnja pojednostavljenja proizlaze iz sljedećeg teorema

8.4 Funkcije koje imaju proizvoljan period

Prijelaz iz funkcije perioda 2π na funkcije koje imaju period T prilično je jednostavan zbog togašto se može provesti izmjena skale. Naime, ako je *f(t)* funkcija perioda T, tada možemo uvesti novu varijablu x tako da nova funkcija, kao funkcija od x, ima period 2π. Ako stavimo:

(1) (a) $$t = \frac{T}{2\pi}x$$ proizlazi

(b) $$x = \frac{2\pi}{T}t$$

Odavde proizlazi da je $x = \pm\pi$, a odgovarajući $t = \pm T/2$ što znači da je f funkcija varijable x sa periodom 2π i možemo ispisati Fourierov red u sljedećem obliku.

(2) $$f(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

čije koeficijente dobivene iz jednadžbe (6) zapisujemo u ovom obliku i računamo prema sljedećim formulama

(a) $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)dx$$

(6) (b) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\cos nx dx$$

(c) $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\sin nx dx$$

Možemo primjeniti i ove formule direktno ali promjenom perioda T pojednostavljujemo jednadžbu:

$$x = \frac{2\pi}{T}t \qquad \text{slijedi} \qquad dx = \frac{2\pi}{T}dt$$

Interval integracije se mjenja i postaje:

$$-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$

Prema tome uporabom Eulerovih formula dobivamo:

(a) $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

(3) (b) $$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}dt \qquad \text{n=1,2...}$$

(c) $$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}dt$$

Za Fourierove koeficijenete funkcije *f(t)*, Fourierov red 2 u kojem je varijabla *x* zamjenjena varijablom *t* ima sljedeći oblik:

(4) $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t)$$

Interval integracije u jednadžbi (3), može se zamjeniti s bilo kojim intervalom duljine T. Primjerice interval $0 \le t \le T$. Iz teorema (1) u poglavlju 8.3 dobivamo slijedeći izraz:

TEOREM 1. Fourierov red parne funkcije *f(x)* perioda T je kosinusni Fourierov red :

(5) $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t$$

s koeficijentima:

(6) $$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt \qquad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}tdt \qquad \text{n=1,2...}$$

Fourierov red neparne funkcije *f(t)* perioda T je sinusni Fourierov red za koji vrijedi:

(7) $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t$$

s koeficijentima:

(8) $$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}tdt$$

8.5 Poluperiodičko proširenje reda

Neka funkcija *f(x)* ima period T =2*l*. Ako je ta funkcija parna iz teorema (2) slijedi da je Fourierov red kosinusni:

(1) $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}t \qquad (f \text{ parna funkcija })$$

s koeficijentima:

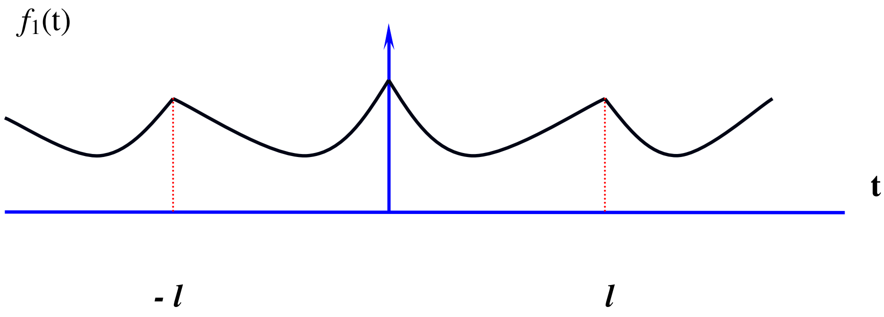
(2) $$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt \qquad \text{n=1,2...}$$

Ako je funkcija *f(x)* neparna funkcija dobiva se Fourierov sinusni red:

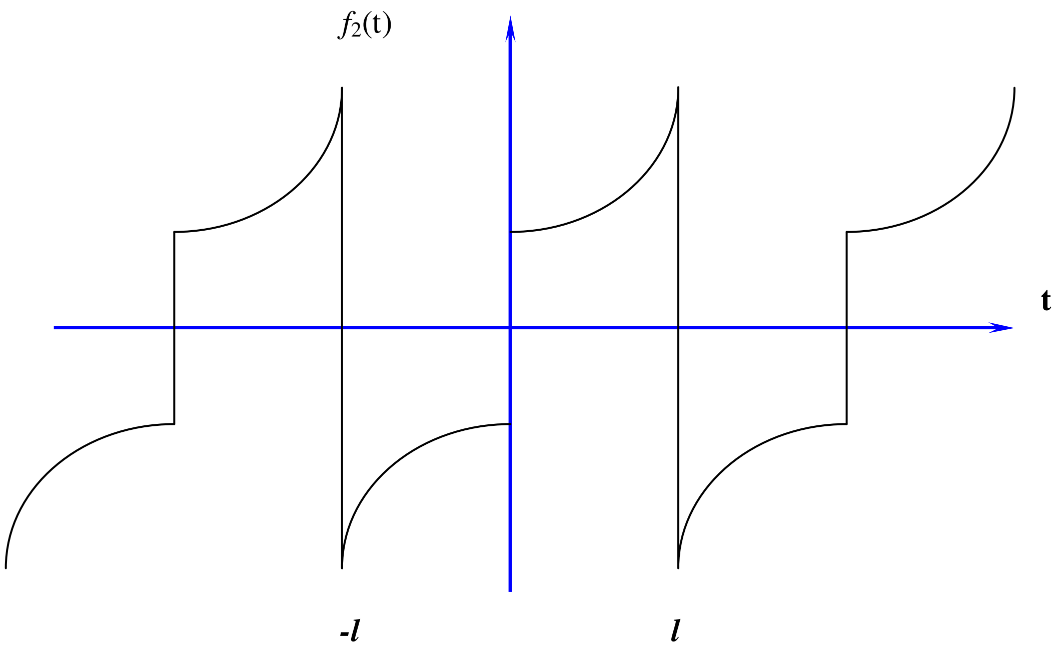
(3) $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}t \qquad (f \text{ neparna funkcija })$$

s koeficijentima:

(4) $$b_n = \frac{2}{l}\int_0^1 f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt$$



(a) periodičko ponavljanje parne funkcije perioda 2*l*



(b) periodičko ponavljanje neparne funkcije perioda 2*l*

Ortogonalne funkcije

Neka su $g_m(x)$ i $g_n(x)$ realne funkcije koje su definirane u intervalu $a \le x \le b$ i neka postoji integral produkta $g_m(x)g_n(x)$ na tom intervalu. Integral ćemo označiti kao (g_m, g_n). Prema tome:

(1) $$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)dx$$

Za funkcije kažemo da su ortogonalne u intevalu $a \le x \le b$ ako je integral (1) jednak nuli:

(2) $$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)dx = 0 \qquad (m \ne n)$$

Skup realnih funkcije $g_1(x), g_2(x), g_3(x),...$ zovemo ortogonalni skup funkcija u intervalu $a \le x \le b$ ako su te funkcije definirane u tom intervalu i ako su jednake nuli za parove različitih funkcije u tom skupu.

Ne-negativan korijen od (g_m, g_m) se zove norma od $g_m(x)$ i obično se označava sa $\|g_m\|$; prema tome

(3) $$\|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m{}^2(x)dx}$$

Osnovna pretpostavka. *Sve funkcije koje se pojavljuju su ograničene i imaju svojstvo da integrali koji se pojavljuju postoje i da njihove norme su jednake nuli .*

Ortogonalni skup $g_1, g_2...$ u inervalu $a \le x \le b$ čije funkcije imaju normu 1 zadovoljava relaciju:

(4) $$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \ne n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad \begin{matrix} m=1,2,... \\ n=1,2,... \end{matrix}$$

Takav skup se naziva ortonormiran skup funkcija u intervalu $a \le x \le b$.
Vidljivo je da iz ortogonalnog skupa možemo dobiti ortonormiran skup djeljenjem svake funkcije s njezinom normom u intervalu koji ramatramo.
Gledajući izvod Eulerove formule (6) iz poglavlja 8.2

(a) $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

(6) (b) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

(c) $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

za Fourierove koeficijente, vidimo da smo jedino slijedili činjenicu da je skup $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ ortogonalan na intervalu duljine 2π.
To upućuje na mogućnost prikaza zadane funkcije *f(x)* pomoću bilo koje ortogonalne familije

(6) $f_1(x), f_2(x), \ldots$ oblika: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \ldots$

Ako taj red konvergira i predočuje *f(x)* nazivamo ga generaliziran Fourierov red funkcije *f(x)*, a njegove koeficijente nazivamo Fourierovim konstantama funkcije *f(x)* s obzirom na taj ortogonalni skup funkcija.

Da odredimo koeficijente, množimo obje strane izraza (6) s $g_m(x)$ i integriramo u intervalu $a \le x \le b$ u kojem su funkcije ortogonalne (pretpostavimo da je parcijalno integriranje dopušteno) i dobivamo:

$$\int_a^b f(x) g_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b g_n(x) g_m(x) dx$$

Dobijamo integral $m = n$ koji je jednak kvadratu iznosa $\|g_m\|$,dok su ostali integrali jedanaki nuli jer su funkcijemeđusobno ortogonalne. Prema tome:

(7') $$\int_a^b f g_m dx = c_m \|g_m\|^2$$

tj,

(7) $$c_m = \frac{1}{\|g_m\|^2}\int_a^b f(x) g_m(x) dx$$

Ako je skup funkcije ortonormiran tada Fourierove konstante zadovoljevaju Besselovu nejednakost:

(8) $$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots \le \int_a^b f^2(x) dx$$

Zato red na lijevoj strani konvergira pa:

$c_n \to 0$ pri $n \to 0$